

Определение: Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , если её приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ представимо в виде: } \Delta y = A \cdot \Delta x + \overline{O}(\Delta x),$$

где $A = \text{const}$ не зависит от Δx .

Замечание: При $A \neq 0$ данное тождество показывает, что бесконечно малая $A\Delta x$ эквивалентна бесконечно малой Δy , и, значит, служит для последней её главной частью.

Определение: Предел $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует называется *производной функции $f(x)$ в точке x* .

Замечание: Иногда данный предел удобно представить в виде: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + x_n) - f(x)}{x_n}$, где $0 \neq x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема: Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда в данной точке существует конечная производная $f'(x)$. Причём в этом случае $A = f'(x)$.

Определение: Назовем главную часть приращения $A\Delta x = Adx$ *дифференциалом функции $f(x)$* . Обозначение dy или df . Имеем, $dy = f'(x) dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Операция дифференцирования обладает следующими свойствами:

1. $[\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$, (*линейность*);
2. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$, (*производная произведения*);
3. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$, (*производная частного*);
4. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, (*производная суперпозиции*);

Определение: Выражениями $f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, определяются соответственно *левая и правая производные*.

14.1. • Пусть функция f дифференцируема и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x + 1/n) - f(x)] = f'(x).$$

Будет ли верно обратное утверждение? То есть, достаточно ли существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + x_n) - f(x)}{x_n}$$

для фиксированной последовательности $\{x_n\}$, убывающей к 0, для существования производной $f'(x)$?

14.2. (991, 992, 993)

(a) • Покажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

непрерывна и дифференцируема в нуле, но имеет разрывную производную;

(б) При каком условии на параметр n функция

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

- непрерывна при $x = 0$;

- дифференцируема при $x = 0$;

- имеет непрерывную производную при $x = 0$?

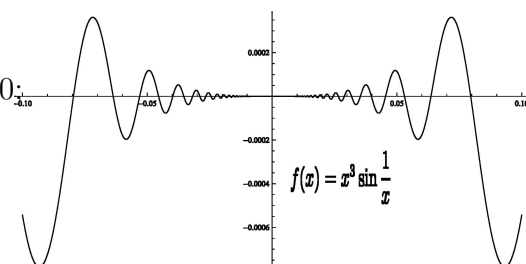
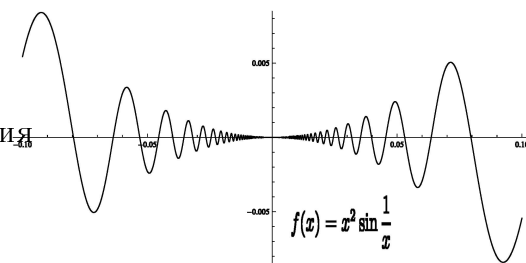
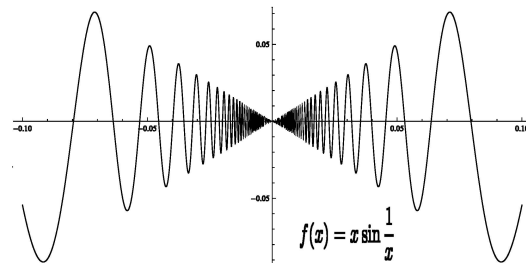
(в) При каком условии на параметры n и $m > 0$ функция

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

имеет:

- ограниченную производную в окрестности точки $x = 0$;

- неограниченную производную в этой окрестности?



14.3. (994, 995)

(a) • Найдите $f'(a)$, если $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна при $x = a$.

(б) Пусть φ непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$. Покажите, что функция

$$f(x) = |x - a| \cdot \varphi(x)$$

не имеет производной в точке $x = a$.

14.4. Постройте пример функции:

(a) • имеющей производную только в одной точке;

(б) имеющей производную только в точках $x_1, \dots, x_n$;

(в) имеющей производную только в счётном числе точек;

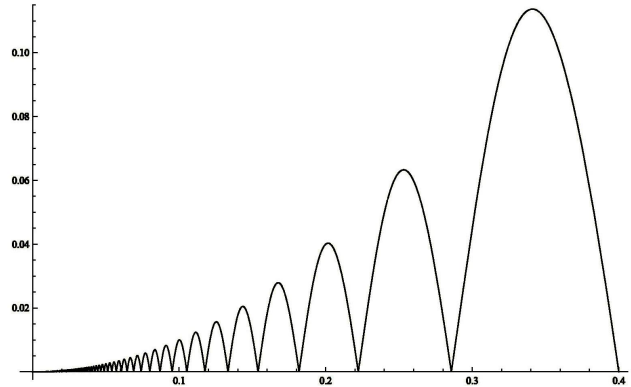
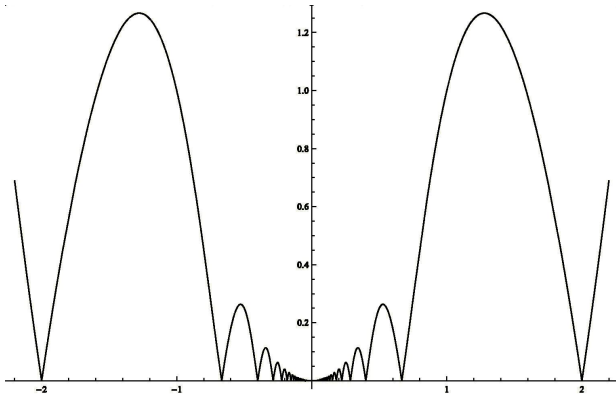
(г) непрерывной, но не дифференцируемой в точках $x_1, \dots, x_n$;

(д) непрерывной, но не дифференцируемой в бесконечном числе точек.

14.5. (997) • Покажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет точки не дифференцируемости в любой окрестности точки $x = 0$, но дифференцируема в этой точке.



14.6. Для функции f определите односторонние производные f'_- , f'_+ , и исследуйте её на дифференцируемость:

(a) • $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$;

(б) $f(x) = x\sqrt{\ln(1 + x^2)}$;

(в) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0; \end{cases}$

(г) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

В случае, когда функция f имеет разрыв в точке $x = x_0$ иногда получается найти *обобщенные односторонние производные*:

Определение: Пусть x_0 - точка разрыва первого рода функции f . Выражения:

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 0)}{h}, \quad f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

называются *обобщёнными односторонними* (соответственно *левой и правой*) *производными функции f* в точке x_0 .

14.7. (1009.2)

Найдите обобщённые производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва функции f , если:

(a) • $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$;

(б) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$;

(в) $f(x) = \operatorname{sgn}(x - x^3)$.

14.8.

(a) Пусть функция f дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$. То обяза-

тельно ли: 1) $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$, 2) $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = \infty$?

(б) Пусть функция f дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$. То обяза-

тельно ли: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$?

14.9. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{при } x \geq a, \\ h(x), & \text{при } x < a. \end{cases}$$

Каким условиям должны удовлетворять непрерывные функции g и h , чтобы функция f была дифференцируемой на всей числовой прямой?

14.10. Функция f имеет производную при $x = a$. Вычислите следующие пределы:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(f \left(a + \frac{1}{n} \right) - f \left(a - \frac{1}{n} \right) \right); \quad (б) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a}, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$(в) \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x) \cos x - f(0)}, \quad a = 0, \quad f'(0) \neq 0;$$

$$(г) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(f \left(a + \frac{1}{n} \right) + f \left(a + \frac{2}{n} \right) + \dots + f \left(a + \frac{k}{n} \right) - k \cdot f(a) \right), \quad k \in \mathbb{N} - \text{фиксировано.}$$

14.11. Имеют ли производные в точке $x = 0$, следующие функции:

$$(a) y = x \cdot |\sin x|;$$

$$(б) y = x \cdot |x^3| ?$$

(в) Пусть функция f определена и имеет производную на $\mathbb{R}$. В каких точках функция $|f|$ имеет производную? При каком условии, производная функции $|f|$ существует на $\mathbb{R}$?

14.12. ★ Приведите пример функции f , такой что $\exists$ ограниченная производная f' всюду на $(-2; 2)$. И множество $\left\{ \pm \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ есть множество точек разрыва функции f' .

14.13. ★ Пусть функция f имеет на $(0; +\infty)$ непрерывную производную, $f(0) = 1$, $|f(x)| \leq e^{-x}$ для $\forall x \geq 0$. Докажите, что $\exists x_0 : f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

14.14. ★ Существует ли непрерывно дифференцируемая функция f , действующая из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ такая, что для $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$f(x) > 0 \text{ и } f'(x) = f(f(x)) ?$$

14.15. ★ Предположим, что функция f имеет производную в точке a , а последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ таковы, что при каждом $n \geq 1$

$$x_n \neq a, \quad z_n \neq a, \quad x_n \neq z_n; \quad x_n \rightarrow a, \quad z_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Докажите, что:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} \text{ не обязательно существует;}$$

$$(б) \text{ если дополнительно при каждом } n \geq 1 \quad x_n < a < z_n, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a).$$

Теорема 1: Пусть $f(x)$ непрерывна на $(a; b)$ и строго монотонна, тогда существует функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывная на $(\alpha; \beta)$, где $\alpha = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\beta = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

Теорема 2: Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и $f'(x) \neq 0$ для $\forall x \in (a; b)$. Тогда, если $\exists f^{-1}(y)$, то $f^{-1}(y)$ дифференцируема на $(\alpha; \beta)$ и $\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)}$.

Рассмотрим систему уравнений:
$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta) \quad (*)$$

Теорема 3: Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $(\alpha; \beta)$ и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на этом интервале, то система $(*)$ определяет y как однозначную непрерывную функцию от x : $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$, на $(a; b)$, где $a = \lim_{t \rightarrow \alpha+0} \varphi(t)$, $b = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t)$.

Теорема 4: Пусть $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$, $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}.$$

15.1. (760) Найдите обратную функцию $x = x(y)$, если $y = x + [x]$.

15.2. (761, 762)

покажите, что

(a) существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$ ($x \in \mathbb{R}$), удовлетворяющая уравнению Кеплера

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

(б) уравнение $\operatorname{ctg} x = kx$ для $\forall k \in \mathbb{R}$ имеет в интервале $(0; \pi)$ единственный непрерывный корень $x = x(k)$.

15.3. • Является ли требование монотонности необходимым для существования однозначной обратной функции?

15.4. (764) В каком случае отображение $y = f(x)$ и обратное к нему $x = f^{-1}(y)$ представляют одну и ту же функцию?

15.5. • Может ли быть непрерывной функция, обратная к разрывной?

15.6. (767, 769, 772) Определите однозначные непрерывные ветви обратных функций для следующих функций:

$$(a) y = x^2; \quad (б) y = \frac{2x}{1+x^2}; \quad (в) y = \operatorname{tg} x.$$

15.7. (781) • Пусть $x = \operatorname{cht}$, $y = \operatorname{sht}$, $t \in \mathbb{R}$.

В каких областях изменения параметра t переменную y можно рассматривать, как однозначную функцию от переменной x ? Найти выражения y для различных областей.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, тогда

$$y - y_0 = y'_x \cdot (x - x_0) \quad - \quad \text{уравнение касательной в точке } (x_0; y_0);$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_x} \cdot (x - x_0) \quad - \quad \text{уравнение нормали в точке } (x_0; y_0),$$

где y'_x — значение производной в точке касания.

15.8.

(a) Напишите уравнение касательной и нормали к кривой

$$\gamma: x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$$

в точках: 1) $t = 0$; 2) $t = -1$; 3) $t = \infty$

(б) Напишите уравнение касательной и нормали к кривой

$$\gamma: x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

в точках: 1) $t = 0$; 2) $t = 1$; 3) $t = \infty$

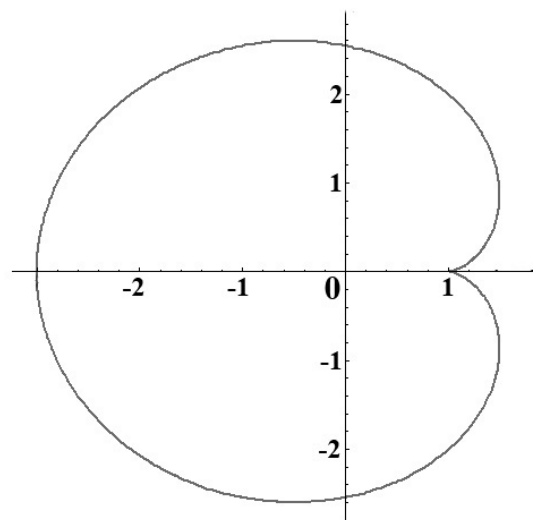
15.9. Напишите уравнение касательной к *кардиоиде*

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t; \\ y = 2 \sin t - \sin 2t; \end{cases}$$

в точке t , если:

$$(a) \bullet t = \frac{\pi}{2}; \quad (б) t = \frac{3\pi}{2}; \quad (в) \bullet t = \pi.$$

Замечание: Более подробно об этой кривой можно узнать из обзорной статьи В.Н. Березина "Кардиоиды" // Квант. — 1977, № 12.

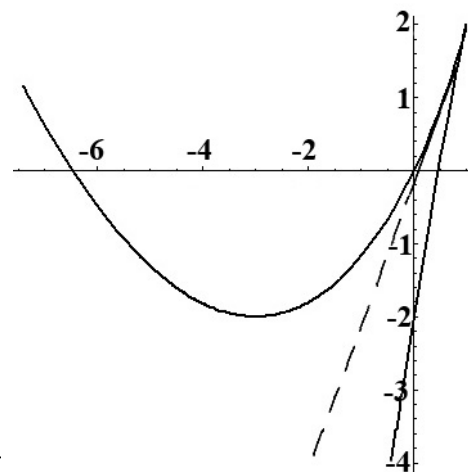


15.10. (пример точки возврата кривой)

Напишите уравнение касательной к кривой

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$$

в точке $t = 1$.

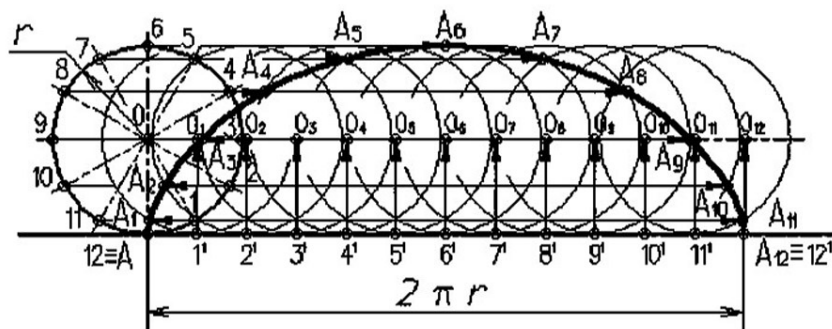


15.11. • Напишите уравнение касательной к циклоиде:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$$

в произвольной точке $t = t_0$. Дайте способ построения касательной к циклоиде.

Замечание: Циклоида определяется *кинематически* как траектория фиксированной точки катящейся без скольжения по прямой.



15.12. Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением:

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad \varphi \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right),$$

где r и φ - *полярные координаты* точки $(x; y)$. Напишите уравнение касательной к данной кривой в точке φ_0 .

Замечание: Требуется перейти к параметрическому виду, используя формулы перехода к полярным координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

15.13. (касательная к эллипсу) •

Пусть $y = y(x)$, $x \in (-a; a)$ - функция, заданная неявно уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Возьмём точку $M_0(x_0; y_0)$, лежащую на данной кривой. Напишите уравнения касательной и нормали к рассматриваемой кривой в данной точке.

15.14. Проверьте, что

(а) любая касательная к *гиперболе*

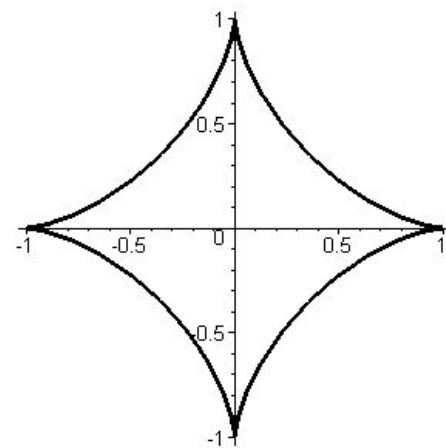
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

образует с её асимптотами треугольник постоянной площади.

(б) у *астроиды*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

для любой касательной длина её отрезка, заключенного между осями координат, постоянна.



Астроида

Замечание: *Астроида* — плоская кривая, описываемая точкой окружности радиуса r , катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $R = 4r$.

(в) у *трактрисы*

$$x(t) = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y(t) = a \sin t, \quad 0 < t < \pi,$$

для любой касательной длина её отрезка от точки касания до оси OX постоянна.

(г) расстояние от начала координат до любой нормали к кривой

$$x(t) = a (\cos t + t \sin t), \quad y(t) = a (\sin t - t \cos t)$$

постоянно.

(д) касательные к кривой

$$x(t) = a (t - \sin t), \quad y(t) = a (1 - \cos t),$$

проведённые в точках, соответствующих значениям t_0 и $t_0 + \pi$, перпендикулярны при любом $t_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Замечание: Важно отметить, что касательная, вообще говоря, не обязана иметь с графиком функции единственную общую точку.

15.15. • Постройте пример функции, отличной от постоянной, график которой имеет бесконечное количество точек пересечения с касательной в *любой* окрестности точки касания.

15.16. ★ Постройте непрерывное взаимно однозначное отображение полуинтервала на некоторое подмножество точек плоскости такое, что обратное к нему отображение разрывно.

Определение: Производная порядка n определяется индукционным соотношением:

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} [f^{(n-1)}(x)] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Замечание: Если функция f имеет непрерывную производную $f^{(n)}$ на интервале $(a; b)$, то пишут: $f(x) \in C^{(n)}(a; b)$. В частности, если f имеет непрерывные производные всех порядков на $(a; b)$, это обозначают: $f(x) \in C^{(\infty)}(a; b)$.

Определение: Дифференциалы порядка n определяются формулами:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \quad (n = 2, 3, \dots), \quad \text{где принято } d^1 y = dy = y' dx.$$

Замечание:

1. Если x - независимая переменная, то полагают: $d^2 x = d^3 x = \dots = 0$. В этом случае справедливо:

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \Leftrightarrow y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2. Если $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$, то

$$dy = y'_x dx, \quad dx = x'_t dt \Rightarrow dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_t dt -$$

инвариантность формы первого дифференциала.

$$d^2 y = d(y'_x dx) = dy'_x dx + y'_x d(dx) = \{dy'_x = y''_{xx} dx\} = y''_{xx} dx^2 + y'_x d^2 x$$

Таблица производных:

$$\begin{aligned} (a^x)^{(n)} &= a^x \ln^n a, \quad (a > 0); & (e^x)^{(n)} &= e^x; \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin \left(x + \frac{\pi n}{2} \right); \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos \left(x + \frac{\pi n}{2} \right); \\ (x^m)^{(n)} &= m(m-1) \dots (m-n+1) x^{m-n}; \\ (\ln x)^{(n)} &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}; \end{aligned}$$

Теорема: (формула Лейбница) Пусть u и v - функции, имеющие на некотором множестве E производные до порядка n включительно. Тогда для n -ой производной и n -ого дифференциала от их произведения справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \quad u^{(0)} = u; \\ d^n(u \cdot v) &= \sum_{k=0}^n C_n^k d^k u \cdot d^{(n-k)} v, \quad d^0 u = u. \end{aligned}$$

16.1. • (нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков)

Пусть $y(x) = x^2$. Найдите d^2y в случае,

(а) x - независимая переменная;

(б) $x = t^2$.

16.2. Найдите d^2y для функций • $y_1 = e^x$, $y_2 = x^x$ в случаях, когда

(а) x - независимая переменная;

(б) x - промежуточный аргумент.

16.3. (1136) • Пусть u и v - дважды дифференцируемые функции. Найдите $d^2(u^m v^n)$, где (m и n - постоянные).

16.4. (1142, 1143) Найдите производные y'_x , y''_{x^2} , y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если:

(а) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

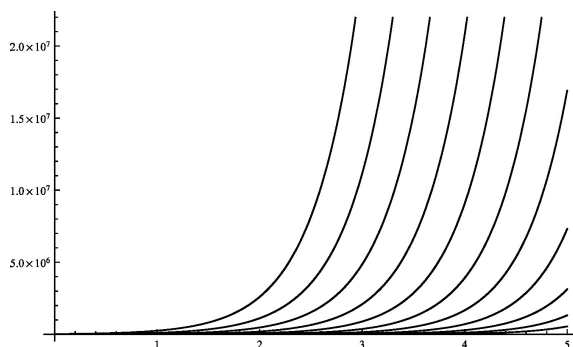
(б) • $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

16.5. (1161, 1165) Найдите производные указанного порядка:

(а) • $y = x^2 e^{2x}$, $y^{(20)} = ?$

(б) $y = x^2 \sin 2x$, $y^{(50)} = ?$

(в) $y = (x^3 + 4x^2 + 2)e^{2x}$, $y^{(10)} = ?$



16.6. (1173, 1175) Считая x независимой переменной, найдите дифференциалы указанного порядка:

(а) $y = x \cos 2x$, $d^{(10)}y = ?$

(б) • $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$, $d^{(6)}y = ?$

16.7. Вычислите производную порядка n функции:

(а) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$;

(б) $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

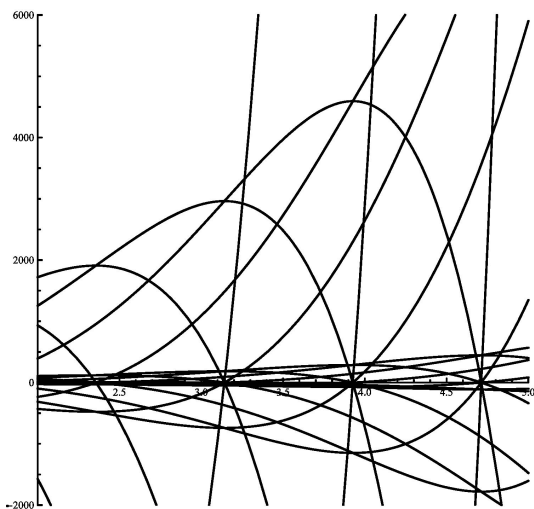
(в) $f(x) = \sin ax \cdot \sin bx$, a и b - постоянные;

(г) $f(x) = \sin ax \cdot \cos bx$, a и b - постоянные;

(д) • $f(x) = e^x \cdot \sin x$;

(е) $f(x) = x^{n-1} e^{1/x}$, $x \neq 0$, $n \geq 1$;

(ж) $f(x) = x^n \ln x$, $x > 0$, $n \geq 1$.



6 Первые 20 производных функции $f(x) = e^x \cdot \sin x$

16.8. (1211, 1212) Найдите $d^n y$, если:

$$(a) y = x^n e^x; \quad (b) y = \frac{\ln x}{x}.$$

16.9. Используя многократное дифференцирование, докажите следующие равенства:

$$(a) \bullet \sum_{k=0}^n C_n^k \sin\left(x + \frac{\pi k}{2}\right) = 2^{n/2} \sin\left(x + \frac{\pi n}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1;$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Замечание: Отметим, что доказательство данных утверждений методом математической индукции весьма трудоёмко.

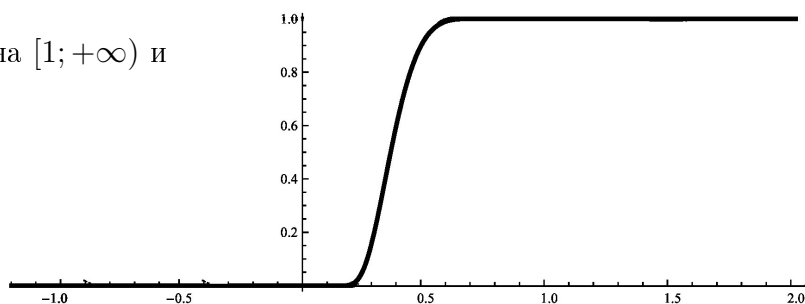
16.10. Постройте пример бесконечно дифференцируемой на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ функции,

(a) $\bullet$ строго положительной при положительных x и равной 0 при отрицательных x ;

(б) положительной в единичном интервале и равной 0 вне его;

(в) $\star$ равной 0 на $(-\infty; 0]$, равной 1 на $[1; +\infty)$ и

строго монотонной на отрезке $[0; 1]$.



16.11. (1226, 1227, 1228)

(a) Докажите, что *многочлены Чебышева*: $T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x)$, $(m = 1, 2, \dots)$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

(б) $\bullet$ Докажите, что *многочлены Лежандра*: $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2 - 1)^m]^{(m)}$, $(m = 1, 2, \dots)$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

(в) *Многочлены Чебышева-Лагерра* определяются формулой:

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)}, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Найдите явное выражение для многочлена $L_m(x)$, и докажите, что $L_m(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xL_m''(x) - (1 - x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0.$$

16.12. ★ Зафиксируем удобное нам произвольное конечное или бесконечное положительное число a . Постройте пример функции $f(x) \in C^\infty(-a; a)$, для которой:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = 1;$$

$$(б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = +\infty;$$

$$(в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n} = 1;$$

$$(г) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n^2} = 1.$$

16.13. Пусть $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$. Найдите $f^{(43)}(0)$.

16.14. Пусть $f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$. Найдите $f^{(n)}(0)$, $(n = 1, 2, \dots)$.

16.15. ★ Предположим, что f - дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, и такая, что для $\forall x \in [0; +\infty)$ выполнено неравенство:

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0.$$

Докажите, что для $\forall x \in [0; +\infty)$ справедливо: $f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

16.16. ★ Пусть f - действительнзначная функция, дифференцируемая $(n + 1)$ раз во всех точках числовой прямой $\mathbb{R}$. Покажите, что для каждой пары действительных чисел a, b , $a < b$, таких, что

$$\ln \left(\frac{f(b) + f'(b) + \dots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \dots + f^{(n)}(a)} \right) = b - a$$

найдётся число $c \in (a; b)$, для которого выполняется равенство $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

16.17. ★ Найдите бесконечно дифференцируемую функцию $f : (0; +\infty) \mapsto (0; +\infty)$, для которой при любом начальном $x_0 > 0$ рекуррентная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ удовлетворяет асимптотическому равенству $x_n \sim \frac{1}{\ln n}$, $n \rightarrow +\infty$.

16.18. ★ Сколько раз дифференцируема в нуле функция $f(x) = \begin{cases} x^k \sin \frac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \end{cases}$

и сколько её производных непрерывно в нуле?

Замечание: Данную задачу интересно сравнить с номером **14.2**.

16.19. ★ Найдите все определённые на действительной оси дважды дифференцируемые функции f такие, что $f'(x) \cdot f''(x) = 0$ для каждого x .

16.20. ★ Пусть f - трижды непрерывно дифференцируемая на числовой прямой функция. Докажите, что найдётся такая точка ξ , что

$$f(\xi) \cdot f'(\xi) \cdot f''(\xi) \cdot f'''(\xi) \geq 0.$$

Теорема (Ролля): Если:

1. функция f определена и непрерывна на $[a; b]$;
2. f имеет конечную производную f' на $(a; b)$;
3. $f(a) = f(b)$;

Тогда найдется хотя бы одно $\xi \in (a; b)$, такое, что $f'(\xi) = 0$.

Теорема (Лагранжа): Если:

1. функция f определена и непрерывна на $[a; b]$;
2. f имеет конечную производную f' на $(a; b)$;

Тогда найдется хотя бы одно $\xi \in (a; b)$, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (\text{формула конечных приращений}).$$

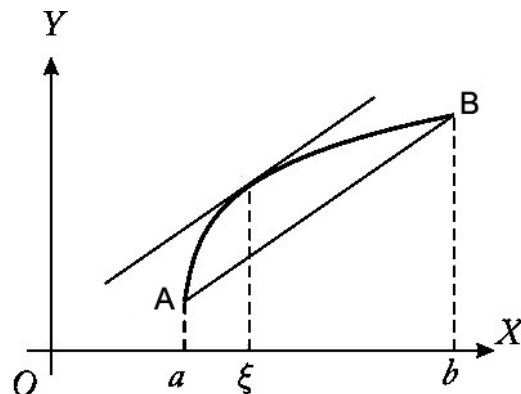
Теорема (Коши): Если:

1. функции f и g определены и непрерывны на $[a; b]$;
2. f и g имеют конечные производные f' и g' на $(a; b)$;
3. $g'(x) \neq 0$, при всех x из $(a; b)$;
4. $g(a) \neq g(b)$;

Тогда найдется хотя бы одно $\xi \in (a; b)$, такое, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Замечание: Отметим, что условие 4) в формулировке теоремы Коши может быть опущено, т.к. если $g(a) = g(b)$, то функция $g(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, а следовательно, найдется такое $\xi \in (a; b)$, что $g'(\xi) = 0$.



геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

17.1. (1244) • Найдите на кривой $y = x^3$ точку (x_0, y_0) , касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1; -1)$ и $B(2; 8)$.

17.2. Приведите пример функции f ,

- (a) имеющей разрыв в одной точке отрезка,
- (б) не имеющей производной в одной точке интервала,
- (в) имеющей различные значения на концах отрезка,

для которой не выполняется заключение теоремы Ролля.

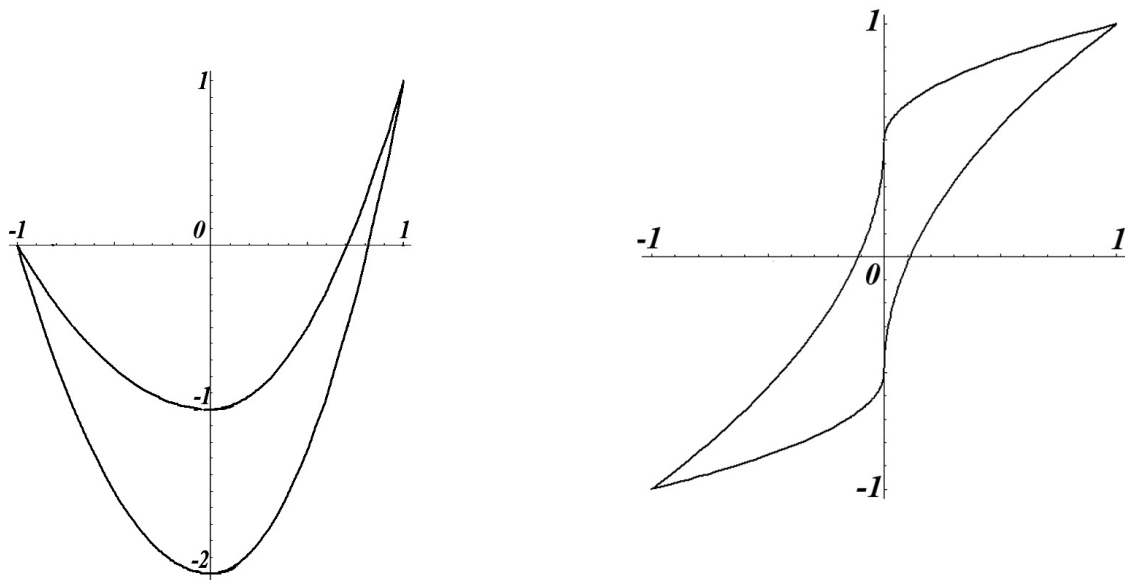
17.3. Приведите пример функции g , не имеющей производной в одной точке интервала, для которой *не выполняется* заключение теоремы Коши.

17.4. Постройте пример функций f и g ,

(а) имеющих бесконечные производные в одной точке интервала,

(б) • имеющих нулевые производные в одной точке интервала,

для которых *не выполняется* заключение теоремы Коши.



17.5. Постройте пример функций f и g ,

(а) • имеющих бесконечные производные в одной точке интервала,

(б) имеющих нулевые производные в одной точке интервала,

для которых *выполняется* заключение теоремы Коши.

Замечание: Аналогичные примеры можно построить и для теоремы Лагранжа.

17.6. (1251) Докажите неравенства:

(а) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, для $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

(б) $py^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x - y)$, если $0 < y < x$, $p > 1$;

(в) $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$, для $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

17.7. (1245) • Пусть $a \cdot b < 0$. Верна ли формула Лагранжа для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на сегменте $[a; b]$?

17.8. (1263, 1264)

(а) Проверить, что функции $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$ имеют одинаковые производные в области $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Вывести зависимость между этими функциями.

(б) Доказать тождество: $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \operatorname{sgn} x$, при $|x| \geq 1$.

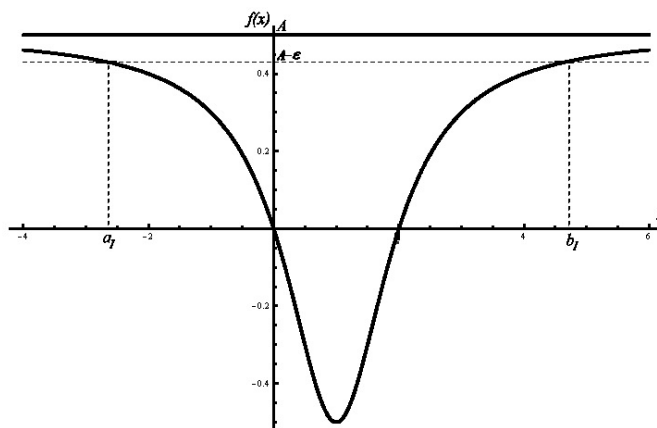
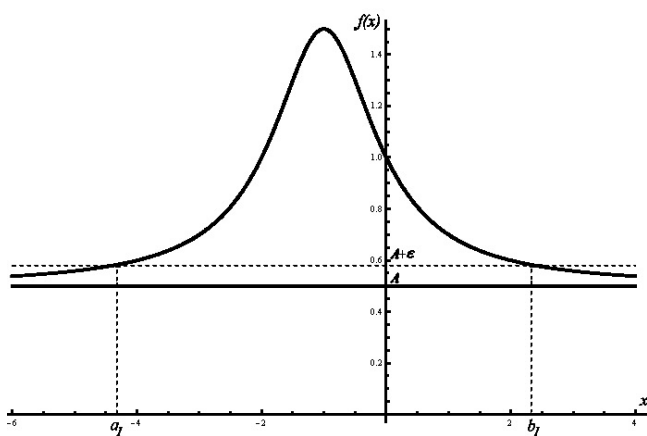
17.9. Пусть f непрерывно дифференцируема на интервале $(a; b)$. Можно ли для $\forall \xi \in (a; b)$ указать точки

$$x_1, x_2 \in (a; b) : \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)?$$

17.10. Докажите, что единственная функция $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' - \lambda y = 0$ есть показательная функция $y = Ce^{\lambda x}$, где $\lambda, C = \text{const}$.

17.11. (1237) • Пусть f имеет конечную производную в каждой точке конечного или бесконечного интервала $(a; b)$ и пусть $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$. Докажите, что

$$\exists c \in (a; b) : f'(c) = 0.$$



17.12. (1238, 1239) (обобщённая теорема Ролля)

(a) • Пусть выполнено:

1. $f \in C^{(n-1)}[x_0; x_n]$;
2. $\exists f^{(n)}$ на $(x_0; x_n)$;
3. $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$, $(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$;

Докажите, что $\exists \xi \in (x_0; x_n)$ такое, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

(б) Пусть для некоторых натуральных p и q выполнено:

1. $f \in C^{(p+q)}[a; b]$;
2. $\exists f^{(p+q+1)}$ на $(a; b)$;
3. $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0$, $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(q)}(b) = 0$;

Докажите, что в таком случае $\exists c \in (a; b) : f^{(p+q+1)}(c) = 0$.

17.13. (1254) Пусть функция f дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале $(a; b)$. Докажите, что её производная f' также не ограничена на $(a; b)$. Верна ли обратная теорема?

17.14. (1258.1) • Докажите, что если:

1. функция f определена и непрерывна на сегменте $[x_0; X]$;
2. f имеет конечную производную f' в интервале $(x_0; X)$;
3. существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0 + 0)$,

то существует соответственно конечная или бесконечная односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

Замечание: Аналогично доказывается и утверждение насчёт левой производной.

Замечание: Из этого можно сделать вывод, что производная функции может иметь только точки разрыва II -го рода. Действительно, т.к. если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

17.15. (1266) Докажите, что если:

1. функция f имеет вторую производную f'' на сегменте $[a; b]$, 2. $f'(a) = f'(b) = 0$,
- то в интервале $(a; b)$ существует по меньшей мере одна точка c такая, что

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

17.16. ★ Функция f дифференцируема на $[0; 1]$, $f(0) = 0$, и для некоторого $k > 0$ справедливо неравенство $|f'(x)| \leq k |f(x)|$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$, при $x \in [0; 1]$.

17.17. ★ Функция $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ имеет производную во всех точках отрезка $[a; b]$ и $b - a \geq 4$. Докажите, что найдётся $x \in (a; b)$, что $f'(x) < 1 + f^2(x)$.

17.18. ★ Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — отличные от 0 действительные числа; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — попарно различные действительные числа. Докажите, что функция $f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + \dots + a_n x^{\alpha_n}$, определённая при $x > 0$, может иметь не более $(n - 1)$ -го нуля на $(0; +\infty)$.

17.19. Пусть функции f, g, h непрерывны на $[a; b]$, существуют f', g', h' на $(a; b)$ и

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}, \quad x \in [a; b].$$

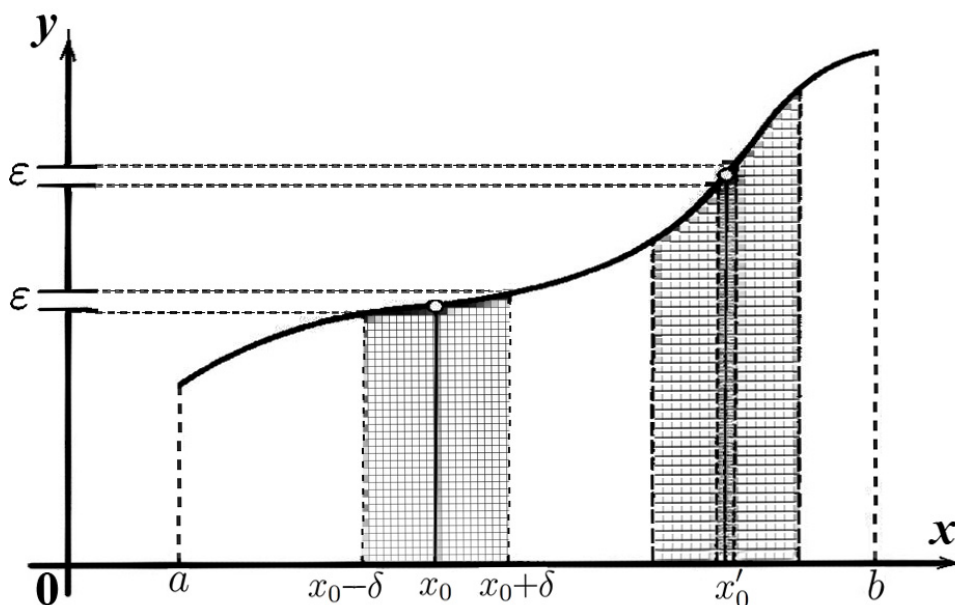
Докажите, что $\exists \theta \in (a; b) : F'(\theta) = 0$. Выведите из этого утверждения теоремы Лагранжа и Коши.

17.20. ★ Пусть f — дважды дифференцируемая функция. Пусть $f(0) = 0$. Докажите, что найдётся такое $\xi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, что

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \xi).$$

Определение: Будем говорить, что функция f *равномерно непрерывна* на множестве X , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \forall x_1, x_2 \in X, |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$



Утверждение: Если f равномерно непрерывна на множестве X , то f непрерывна во всех точках этого множества.

Теорема (Кантора):

Если $f(x)$ непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве X , то f и равномерно непрерывна на этом множестве.

Замечание: Главное в определении равномерной непрерывности то, что для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$, гарантирующее выполнение неравенства $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ *сразу для всех* $x_1, x_2 \in X$ *при единственном условии* $|x_1 - x_2| < \delta$.

18.1. (787) • Сформулируйте на языке “ $\varepsilon - \delta$ ” утверждение: функция f непрерывна на множестве X , но не является равномерно непрерывной на нём.

18.2. Постройте пример функции,

- (а) • определённой и непрерывной на конечном полуинтервале, но не являющейся равномерно непрерывной на нём;
- (б) • определённой и непрерывной на неограниченном полуинтервале, но не являющейся равномерно непрерывной на нём.

Определение: Пусть функция f задана на отрезке $[a; b]$. Тогда величина

$$\omega(f; [a; b]) = \sup_{x, x' \in [a; b]} |f(x') - f(x)|$$

называется *колебанием функции f на отрезке $[a; b]$* .

Определение: Модулем непрерывности $\omega(\delta; f)$ функции f , определённой на отрезке $[a; b]$, называется функция

$$\omega(\delta; f; [a; b]) = \sup_{|x' - x''| < \delta} |f(x'') - f(x')|, \quad x', x'' \in [a; b];$$

18.3. (утверждения, облегчающие исследование на равномерную непрерывность)

Докажите следующие предложения:

(а) • Пусть интервал $(a; b)$ конечен, тогда: функция f непрерывна на $(a; b)$, $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$, тогда и только тогда, когда f равномерно непрерывна на $(a; b)$;

(б) • Функция f определена и непрерывна в области $[a; +\infty)$ и $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < \infty$, тогда f равномерно непрерывна на $[a; +\infty)$;

(в) Пусть функция f непрерывна на интервале $(a; b)$ (конечном или бесконечном), f монотонна и ограничена на нём. Тогда эта функция равномерно непрерывна на этом интервале;

(г) Если функция f определена и имеет ограниченную производную на некотором интервале $(a; b)$ (конечном или бесконечном), то она равномерно непрерывна на нём;

(д) Для того, чтобы функция f была равномерно непрерывна на отрезке $[a; b]$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, что при $0 < x' - x < \delta$, $[x; x'] \subset [a; b]$ выполнялось неравенство: $\omega(f; [x; x']) < \varepsilon$;

(е) Для того, чтобы определённая на множестве $\mathbf{E}$ функция f была равномерно непрерывна на нём необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \omega(\delta; f; \mathbf{E}) = 0$;

(жс) Сумма и произведение конечного числа равномерно непрерывных на ограниченном интервале $(a; b)$ функций равномерно непрерывна на этом интервале.

(з) Пусть функция $f : (a; b) \mapsto \mathbb{R}$ имеет вторую производную на интервале $(a; b)$, причём $\sup_{(a; b)} |f''(x)| < +\infty$. Тогда функция f равномерно непрерывна на $(a; b)$.

(и) Если функция неограничена на ограниченном интервале, то она не является равномерно непрерывной на этом интервале.

18.4. Является ли требование ограниченности функции f на $\mathbb{R}$ необходимым для того, чтобы f могла быть равномерно непрерывной на этом множестве?

18.5. Исследуйте на равномерную непрерывность следующие функции, используя определение данного свойства:

(a) $f(x) = \sin x$ на $\mathbb{R}$;

(б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на $\mathbb{R}$;

(в) • $f(x) = \frac{1}{x}$ на 1) $[a; +\infty)$, $a > 0$; 2) $(0; a]$, $a > 0$;

(г) • $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0; +\infty)$;

(д) $f(x) = \ln x$ на $(0; 1)$;

(е) $f(x) = x \sin x$ на $[0; +\infty)$;

(ж) $f(x) = \sin(x^2)$ на $[0; +\infty)$.

18.6. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $\frac{\sin x}{x}$ при $0 < x < \pi$.

(a) • с использованием теоремы Кантора;

(б) ★ без использования теоремы Кантора;

18.7. (801.1) Покажите, что функция

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$$

равномерно непрерывна на каждом интервале $J_1 = \{-1 < x < 0\}$ и $J_2 = \{0 < x < 1\}$ по отдельности, но не является равномерно непрерывной на множестве $J_1 \cup J_2 = \{0 < |x| < 1\}$.

18.8. Исследуйте на равномерную непрерывность следующие функции:

(a) $f(x) = \sqrt{\ln x} \cdot \cos \frac{1}{x}$ при $x \in [2; +\infty)$;

(б) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \in (0; 1)$.

18.9. Докажите, что функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Замечание: Из данной задачи можно сделать вывод, что на бесконечном промежутке произведение двух равномерно непрерывных функций, вообще говоря, может уже не являться равномерно непрерывным (ср. с №18.3,ж).

18.10. Пусть функция f удовлетворяет на множестве $\mathbf{X}$ следующему условию:

$$\exists k > 0, \alpha > 0 : \forall x_1, x_2 \in \mathbf{X} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|^\alpha$$

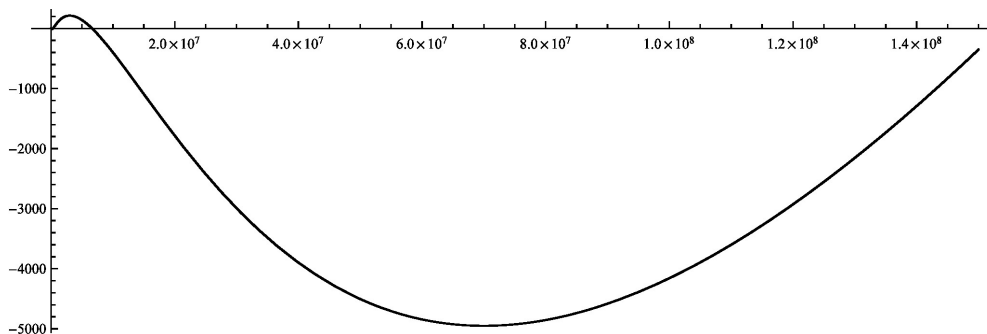
(при $\alpha = 1$ это условие называют *условием Липшица*, а при $\alpha < 1$ — *условием Гёльдера порядка α*). Докажите, что функция, удовлетворяющая этому условию, равномерно непрерывна на множестве $\mathbf{X}$.

Утверждение (*Лемма Гейне-Бореля*): Из всякой бесконечной системы интервалов, покрывающей отрезок числовой прямой, можно выбрать конечную подсистему, также покрывающую этот отрезок.

18.11. Докажите теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке, с помощью леммы Гейне-Бореля.

18.12. ★ Пусть функция $f : [1; +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Верно ли, что

- (а) $\frac{f(x)}{x}$ ограничена; (б) существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$?



18.13. ★ Пусть функция f определена на луче $[0; +\infty)$ и равномерно непрерывна на нём. Известно, что для любого $x \geq 0$ выполняется тождество:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + n) = 0, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

18.14. ★ Пусть функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Докажите, что

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \sup_{x \in [a; b-h]} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = 0.$$

18.15. Пусть функция f – непрерывна на $\mathbb{R}$ и периодична с периодом $T > 0$. Докажите, что функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

18.16. ★ Будет ли функция $f(n) = \sin n$, определённая на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, равномерно непрерывной?

Рассмотрим точку a на вещественной прямой $\mathbb{R}$, возможно равную ∞ .

Теорема: (первое правило Лопиталя)

Пусть найдется такое $\delta > 0$, что выполнено:

1. функции f, g непрерывны в $\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$;
2. производные f' и g' существуют в $\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta(a)$, причём $g'(x) \neq 0$, $x \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta(a)$;
3. существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

Тогда имеем: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема: (второе правило Лопиталя)

Пусть найдется такое $\delta > 0$, что выполнено:

1. функции f, g непрерывны в $\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$;
2. производные f' и g' существуют в $\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta(a)$, причём $g'(x) \neq 0$, $x \in \overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta(a)$;
3. существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

Тогда имеем: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание: раскрытие неопределённостей видов: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 путём алгебраических преобразований и логарифмирования приводится к раскрытию неопределённостей двух первых типов: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

19.1. Можно ли построить пример

(а) • разрывных в любой окрестности $\overset{\circ}{\mathbf{B}}_\delta(a)$ функций f и g , таких, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ и выполнено: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;

(б) • непрерывных функций f и g , таких, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, но $\nexists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, и $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$;

(в) бесконечно дифференцируемых функций f и g , для которых существуют пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$. Однако, $\lim_{x \rightarrow a} f^{(k)}(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g^{(k)}(x) = 0$ для $\forall k \in \mathbb{N}$;

(з) функций f и g , имеющих при $x \neq a$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, для которых $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Существует предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, но не существует предела $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

19.2. (1322, 1330, 1336, 1341, 1343, 1348, 1351, 1356, 1359, 1363, 1368, 1369)

Определите значения следующих выражений:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x};$$

$$(б) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right);$$

$$(в) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon}, \quad (\varepsilon > 0);$$

$$(з) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^\varepsilon \ln x, \quad (\varepsilon > 0);$$

$$(д) \lim_{x \rightarrow 0+0} x^{x^x-1};$$

$$(е) \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

$$(жс) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{1/x};$$

$$(з) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right);$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x};$$

$$(\kappa) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2};$$

$$(\lambda) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2};$$

$$(\mathcal{M}) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$(\eta) \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3} - \sqrt{1+x+x^2} \cdot \frac{\ln(e^x+x)}{x} \right); \quad (o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x};$$

Замечание: Применяя правило Лопиталья, часто бывает выгодно предварительно использовать асимптотические равенства вида:

$$\sin \alpha \sim \operatorname{tg} \alpha \sim (e^\alpha - 1) \sim \ln(1 + \alpha) \sim \operatorname{sh} \alpha \sim \operatorname{arctg} \alpha \sim \arcsin \alpha \sim \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

19.3. Вычислите следующие пределы:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg}(\pi x) \right);$$

$$(б) \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x};$$

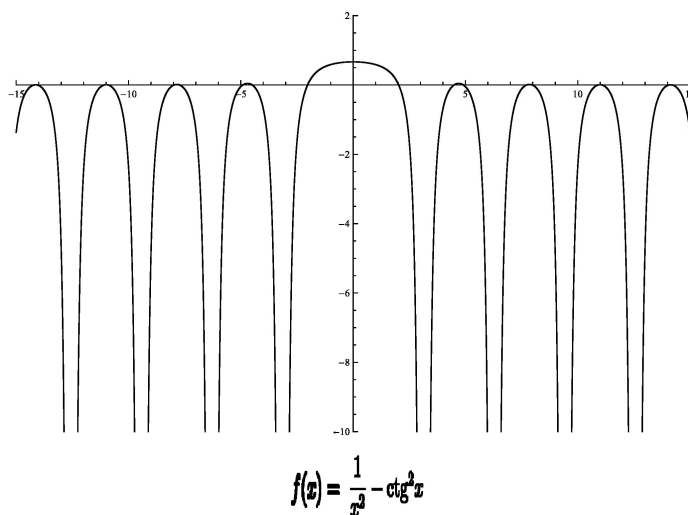
Замечание: В последнем примере будет ошибкой перейти в числителе к асимптотическому равенству:

$$\sin x - x \cos x \sim x(1 - \cos x).$$

$$(в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x \cdot \ln(1+x)}{\operatorname{tg} x - x};$$

$$(г) \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right);$$

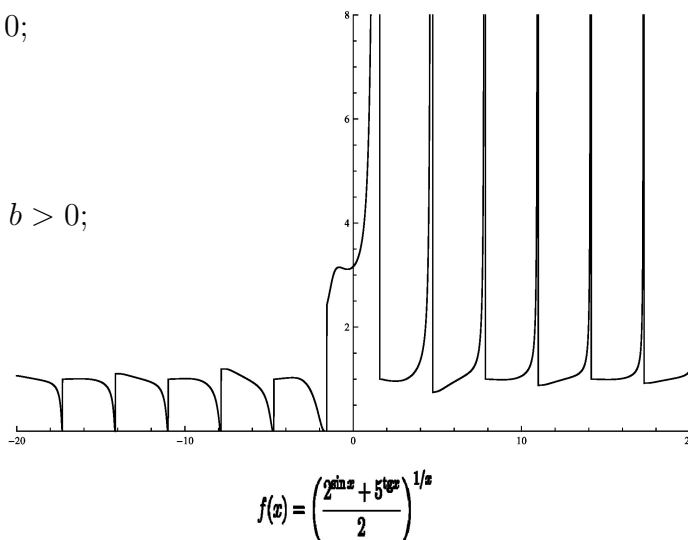
$$(д) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{a^x - 1}{a - 1} \right)^{1/x}, \quad 0 \leq a \neq 1;$$



$$(е) \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x}}{2} \right)^{1/x}, \quad a > 0, b > 0;$$

$$(ж) \lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{a^{\ln x} + b^{\ln x}}{a + b} \right)^{\frac{1}{\ln x - 1}}, \quad a > 0, b > 0;$$

$$(з) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sin x))^{1/x^2};$$



19.4.

(a) • Пусть функция f - дважды непрерывно дифференцируема, найдите предел:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2};$$

(б) Пусть функция f - трижды непрерывно дифференцируема, найдите предел:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)}{h^3}.$$

19.5. (1373)

Исследуйте на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{при } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

В случае дифференцируемости, найдите значение производной f' в точке 0.

19.6. (1374)

Исследуйте возможность применения правила Лопиталя и вычислите следующие пределы:

$$(a) \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}; \quad (б) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}};$$

$$(в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin(1/x)}{\sin^2 x}.$$

19.7. * Функция $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную на $(0; +\infty)$, причём

(a) $f(x) + f'(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow +\infty$. Докажите, что $f(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow +\infty$.

(б) $f(x) + 2f'(x)\sqrt{x} \rightarrow 0$, при $x \rightarrow +\infty$. Докажите, что $f(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow +\infty$.

19.8. * Найдите пределы:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n p_k a_k^x \right)^{1/x}, \quad p_k > 0, \quad a_k > 0, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$(б) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sum_{k=1}^n p_k a_k^x \right)^{1/x}, \quad p_k > 0, \quad a_k > 0, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$(в) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n p_k a_k^x \right)^{1/x}, \quad p_k \geq 0, \quad a_k > 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1;$$

19.9. * (Задача В.И. Арнольда) Найдите предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\arcsin x) - \arcsin(\operatorname{arctg} x)}.$$

Теорема: Пусть функция f определена в окрестности $\mathbf{B}(x_0)$ точки x_0 , имеет в этой окрестности производные до $(n-1)$ -го порядка включительно, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \overline{O}((x - x_0)^n), \quad \text{при } x \rightarrow x_0. \quad (1)$$

Определение: Многочлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ называется *многочленом Тейлора функции f в точке x_0* .

Определение: Функция $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ называется *остаточным членом n -го порядка формулы Тейлора*.

Определение: Формула (1) называется *формулой Тейлора n -го порядка для функции f в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано (или локальной формулой Тейлора)*.

Определение: Если $x_0 = 0$, то формула (1) принимает вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \overline{O}(x^n), \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

и называется *формулой Маклорена*.

Таблица основных разложений:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \overline{O}(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \overline{O}(x^{2n}).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \overline{O}(x^{2n+1}).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \overline{O}(x^n).$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \overline{O}(x^n).$$

Теорема (Тейлора):

Функция f , имеющая в точке x_0 производные до n -го порядка включительно, единственным образом представляются в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + \overline{O}((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0,$$

где коэффициенты разложения определяются формулами:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

Теорема: Если функция f имеет в некоторой окрестности $\mathbf{B}(x_0)$ точки x_0 , производные до $(n+1)$ -го порядка включительно, то для любой точки $x \in \mathbf{B}(x_0)$ найдется точка ξ , лежащая между x и x_0 , такая что:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (3)$$

Определение: Формула (3) называется *формулой Тейлора с остаточным членом*
 $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ в *форме Лагранжа*.

20.1. (1377) Напишите разложения по целым неотрицательным степеням x до члена с x^5 следующих функций:

$$(a) f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}.$$

$$(б) f(x) = \frac{x}{x^2+x+1};$$

$$(в) f(x) = \frac{5x^2}{x^2+2x+3};$$

$$(г) f(x) = \frac{2x^3-4x^2+x+1}{x^2+3x+1}.$$

Чему равно значение $f^{(5)}(0)$ для этих функций?

20.2. (1379, 1381, 1382, 1385, 1387) Представьте формулой Маклорена функцию f до членов указанного порядка:

$$(a) f(x) = \sqrt[m]{a^m+x}, \quad (a > 0) \quad \text{до } \overline{O}(x^2); \quad (б) \bullet f(x) = e^{2x-x^2} \quad \text{до } \overline{O}(x^5);$$

$$(в) f(x) = \frac{x}{e^x-1} \quad \text{до } \overline{O}(x^4); \quad (г) f(x) = \sin(\sin x) \quad \text{до } \overline{O}(x^3);$$

$$(д) \bullet f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad \text{до } \overline{O}(x^6); \quad (е) \bullet f(x) = \sin x \cdot \ln(1+x) \quad \text{до } \overline{O}(x^5);$$

$$(ж) f(x) = e^{\sin(\ln(1+2x))} \quad \text{до } \overline{O}(x^3); \quad (з) f(x) = \frac{x^2}{1+\sin x} \quad \text{до } \overline{O}(x^6).$$

Определение: *Метод неопределённых коэффициентов* - метод, используемый для нахождения искомой функции в виде точной или приближённой линейной комбинации конечно-го или бесконечного набора базовых функций. Указанная линейная комбинация берётся с неизвестными коэффициентами, которые определяются тем или иным способом из условий рассматриваемой задачи. Обычно для них получается система алгебраических уравнений.

20.3. Применяя метод неопределённых коэффициентов, получите формулу Маклорена с $\overline{O}(x^5)$ функции f , если:

$$(a) \bullet f(x) = \operatorname{tg} x;$$

$$(б) f(x) = \operatorname{th} x.$$

Пусть известно представление формулой Тейлора в окрестности точки x_0 до $\overline{O}((x-x_0)^n)$ производной функции f , то есть известна формула:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x-x_0)^k + \overline{O}((x-x_0)^n), \quad b_k = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}.$$

Тогда существует $f^{(n+1)}(x_0)$, и поэтому функцию f можно представить в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k (x-x_0)^k + \overline{O}((x-x_0)^{n+1}) = a_0 + \sum_{k=0}^n a_{k+1} (x-x_0)^{k+1} + \overline{O}((x-x_0)^{n+1}),$$

где $a_0 = f(x_0)$, $a_{k+1} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{b_k}{k+1}$.

Следовательно,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + \overline{O}((x-x_0)^{n+1}), \quad (4)$$

где b_k – коэффициенты формулы Тейлора функции f' .

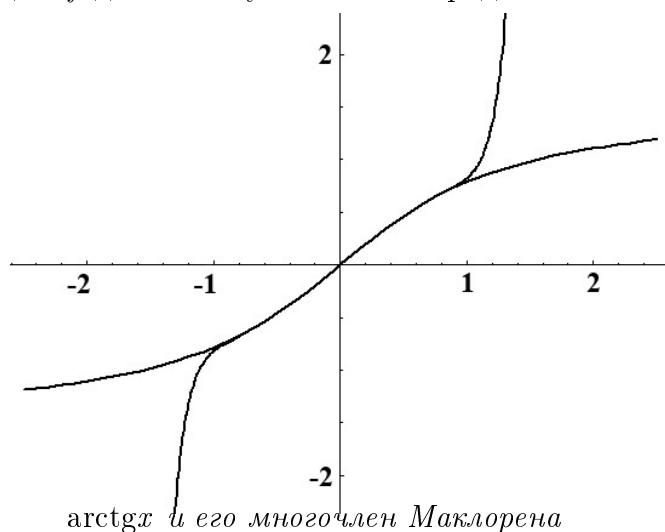
20.4. Представьте формулой Маклорена функцию f до членов указанного порядка:

(a) • $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до $\overline{O}(x^{2n+2})$;

(б) $f(x) = \arcsin x$ до $\overline{O}(x^{2n+2})$;

(в) $f(x) = \arccos\left(x + \frac{1}{2}\right)$ до $\overline{O}(x^3)$;

(г) $f(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ до $\overline{O}(x^{2n+2})$;



20.5. Найдите следующие пределы, используя формулу Тейлора:

(a) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right]$;

(б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$;

(в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$;

(г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^x$;

(д) • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(3+x^2) - \operatorname{arctg}(2+\cos x)}{\ln(1+x) - e^x + 1}$;

(е) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sh} \frac{x^2}{2}} \right)^{\frac{1}{\ln \frac{(1+x)^3}{1+3x}}}$;

20.6. Пусть f – бесконечно дифференцируемая в нуле функция. Докажите, что если

(a) f чётная, то её разложение по формуле Маклорена содержит только чётные степени x ;

(б) f нечётная, то её разложение по формуле Маклорена содержит только нечётные степени x .

20.7. • Представьте формулой Маклорена функцию $f(x) = e^x + x^2|x|$ до $\overline{O}(x^n)$. Какие значения может принимать n ?

20.8. Пусть $f \in C^{(3)}(\mathbb{R})$, функции f, f', f'', f''' всюду положительны. Докажите, что $\exists a > 0 : f(x) > ax^2$ при $\forall x > 0$.

20.9. ★ Пусть $f \in C^{(2)}(-1; 1)$, $f''(0) \neq 0$ и для $\forall x \in (-1; 1)$ значение $\theta(x)$ определяется как одно из чисел θ , для которых

$$f(x) - f(0) = f'(\theta)x, \quad \theta \in (0; 1).$$

Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\theta(x)}{x}$, если он существует.

20.10. ★ Пусть $f \in C^{(2)}[0; 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ и $\min_{[0; 1]} f(x) = -1$. Докажите, что $\max_{[0; 1]} f''(x) \geq 8$.

20.11. ★ Пусть k – фиксированное положительное число. n -ая производная функции $\frac{1}{x^k - 1}$ имеет вид: $\frac{P_n(x)}{(x^k - 1)^{n+1}}$, где P_n – некоторый полином. Найдите величину $P_n(1)$.

20.12. ★ Разложите в бесконечную сумму по Маклорену функцию

$$e^{x \cos \alpha} \sin(x \sin \alpha),$$

где α – произвольное действительное число.

20.13. ★ Пусть $f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ и пусть все коэффициенты в разложении отношения $\frac{f'(x)}{f(x)}$ по степеням x по модулю не превосходят 2. Докажите, что $|a_n| \leq n + 1$.

20.14. ★ Покажите, что для всех натуральных $n > 1$, справедливо неравенство:

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$